GOOL
בשביל התירגול

פיזיקה 1 מכניקה

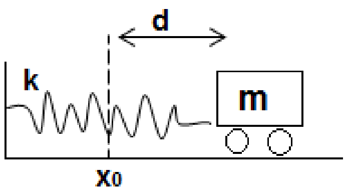
פרק 15 - תנועה הרמונית

תוכן העניינים

תנועה הרמונית פשוטה:

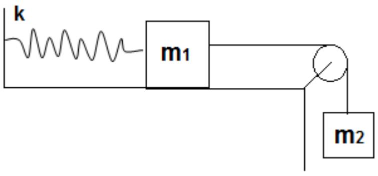
שאלות:

1) דוגמה - מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k.
מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה.
מצא את $x(t)$ של המסה.

2) דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



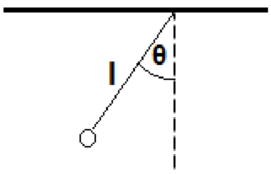
מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k. מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M.

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.

ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)



$\theta \ll \pi$

נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).

תשובות סופיות:

1) $x(t)=-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+x_0$

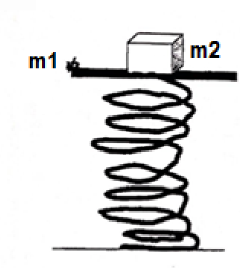
2) א. $x=\frac{m_2 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ ג. $A_{max}=\frac{g}{\omega^2}$

3) $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\theta(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) מסה על משטח על קפיץ אנכי



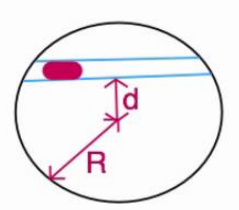
על קפיץ שקבועו k מונח משטח שמסתו m_1,
המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ.
על המשטח מונח גוף שמסתו m_2.
מכווצים את הקפיץ בשיעור Δy ומשחררים.

א. מה צריך להיות Δy_{min} כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

ב. הניחו: $m_2 = 0.06kg$, $m_1 = 0.04kg$, $k = 10\frac{Nr}{m}$, $\Delta y = 2\Delta y_{min}$
ומצאו את רגע הניתוק.

ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?

2) תנודה בתעלה בכדו"א



בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט.
מסת כדור הארץ M.
מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

3) שתי מסות מחוברות בקפיץ**

שתי מסות m_1 ו- m_2 מחוברות בקפיץ בעל קבוע k ואורך רפוי l.
המסות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק.
נותנים דחיפה ימינה למסה m_1 המקנה לה מהירות התחלתית v_0.

א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הבעיה)?
רמז: על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2};\ x_{rel} = x_1 - x_2$$

ב. מצאו את מיקום המסה m_2 כתלות בזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $\Delta y_{\min}=\dfrac{\left(\mathrm{m_1+m_2}\right)}{\mathrm{k}}$

ב. $t_1=\dfrac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

ג. $\Delta y_{\min}=\dfrac{\left(\mathrm{m_1+m_2}\right)}{\mathrm{k}}$, $\mathrm{v}(t)=\dot{y}(t)=-2\Delta\mathrm{y}_{\min}\omega\sin(\omega t)$

2) $\ddot{x}=-\left(\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^3}\right)(x-0)$

3) א. $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$

ב. $x_2(t)=\dfrac{m_1}{m_1+m}(l+v_0t)-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)$, $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{v_0^2+l^2\omega^2}}{\omega}$,

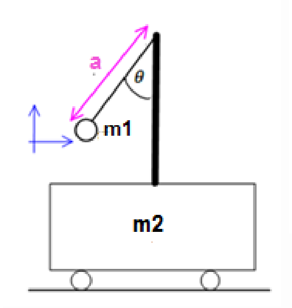
$\tan\varphi=-\dfrac{v_0}{\omega l}$

תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

שאלות:

1) מטוטלת על עגלה נעה

עגלה בעלת מסה m_2 חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך.
אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית
עם מסה m_1 ואורך חוט a.
משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר
כל המערכת נמצאת במנוחה.



א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של θ ו-$\dot{\theta}$.

ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של θ ו-$\dot{\theta}$.

ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.

ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.

ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה M.

תשובות סופיות:

2) א. $v_x = \dot{\theta} a\cos\theta \;,\; v_y = \dot{\theta} a\sin\theta$

ב. $v_{1_x} = \left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a\dot{\theta}\cos\theta \;,\; v_{1_y} = \dot{\theta} a\sin\theta$

ג. $E = \dfrac{1}{2}m_1\left(\left(\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)\right)^{-2} a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2 a^2\sin^2\theta - m_1 g a\cos\theta$

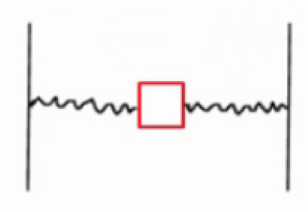
ד. $E = \dfrac{1}{2}m_1\left(\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{ga}{2}\theta^2\right) - m_1 g a\dfrac{1}{2}$

ה. $\omega = \sqrt{\dfrac{\dfrac{ga^2}{2}}{\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2}}$

תרגילים למתקדמים:

שאלות:

1) מסה בין שני קפיצים עם אורך זניח

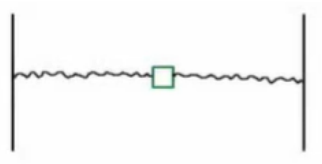


בין שני קירות במרחק 2L נמצאת מסה m המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם k ואורך רפוי זניח.

א. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה- x.

ב. מצא את תדירויות התנודות הקטנות בציר ה- y.

2) מסה בין שני קפיצים (אורך רפוי לא זניח)**

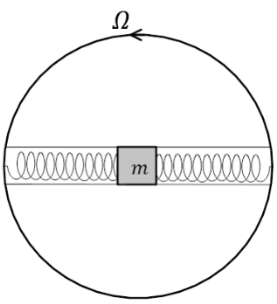


בין שני קירות במרחק 2L נמצאת מסה m המחוברת לקירות בקפיצים בעלי מקדם k ואורך רפוי l_0.

מצא את תדירות התנודות הקטנות בציר ה- y.

3) מסה בתוך חישוק מסתובב

(כולל קוריאוליס וקורדינטות פולריות)

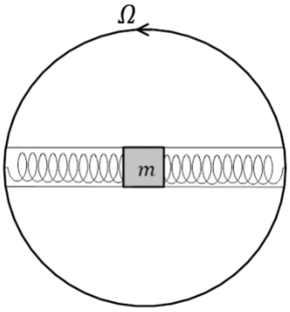


גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק. המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף. הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k. מסובבים את החישוק במהירות זוויתית Ω ומרחיקים את המסה מעט מהמרכז.

רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מה התנאי לתנועה הרמונית ומהי תדירות התנועה אם התנאי מתקיים? (מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).

4) מסה בתוך חישוק מסתובב עם חיכוך

(כולל קואורדינטות פולריות, קוריאוליס, ותנועה מרוסנת)



גוף שמסתו m נמצא במרכז תעלה הנמצאת לאורך קוטרו של חישוק. המערכת מונחת על השולחן כך שכוח הכובד לתוך הגוף. הגוף מחובר לשני קפיצים זהים אחד מכל צד המצויים במצב הרפוי כאשר הגוף במרכז החישוק. קבוע הקפיצים הוא k. מסובבים את החישוק במהירות זוויתית Ω ומשחררים את המסה ממנוחה במרחק d מהמרכז.

בין המסה והדופן של התעלה קיים חיכוך (אין חיכוך עם הבסיס).

מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי הם: μ_k , μ_s .

א. רשום משוואת כוחות במערכת החישוק, מהם התנאים לתנועה הרמונית? האם צריך את מקדם החיכוך הסטטי?

ב. מצא את המיקום כתלות בזמן בהנחת התנאים של סעיף א',
מהו מקדם האיכות של המערכת?
(מומלץ לפתור גם באמצעות ק. פולריות).

תשובות סופיות:

1) א. $\omega_x = \sqrt{\frac{2\text{k}}{\text{m}}}$ ב. $\omega_y = \sqrt{\frac{2\text{k}}{\text{m}}}$

2) $-\left(2\text{k}\frac{\text{L}\cdot\text{l}_0}{\text{L}}\right)y = \ddot{y}$

3) $\left(-2\text{k}-\Omega^2\text{m}\right)x = \text{m}\ddot{x}$, $2\text{k}-\Omega^2\text{m} > 0$, $\omega = \sqrt{\frac{2\text{k}-\text{m}\Omega^2}{\text{m}}}$

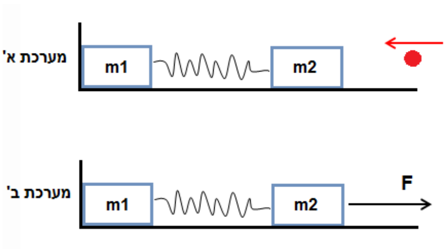
4) א. $\Omega^2\left(1+{\mu_k}^2\right) < \frac{2\text{k}}{\text{m}}$, $-2\text{k}x+\text{m}\Omega^2 x - 2\mu_k \text{m}\Omega\dot{x} = \text{m}\ddot{x}$, לא כי $\text{N}=0$ כשהגוף נעצר.

ב. $x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(\text{d}\cos(\tilde{\omega}t) - \frac{\text{d}\sqrt{1-{\omega_0}^2}}{\tilde{\omega}}\sin(\tilde{\omega}t)\right)$, $\text{Q} = \frac{\omega_0}{\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{2\text{k}}{\text{m}}}}{2\mu_\text{k}\Omega}$.

תרגילים לבקשת סטודנטים:

שאלות:

1) קפיץ נמתח להתארכות מקסימלית



קליע בעל מסה זניחה נע במהירות לא ידועה לעבר מסה m_2 שמחוברת למסה m_1 דרך קפיץ בעל מקדם אלסטי k.

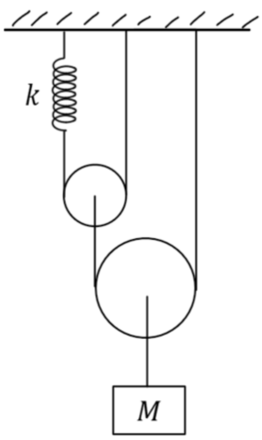
המסה m_1 ניצבת בצמוד לקיר כמתואר בשרטוט.

א. לאחר פגיעת הקליע הקפיץ מתכווץ במצב המקסימלי ומאבד d מאורכו.
מהי מהירות מרכז המסה מייד לאחר שהמערכת מתנתקת מהקיר?

ב. על מערכת בעלת נתונים זהים ואורך קפיץ רפוי l מופעל כוח קבוע ואופקי F לכיוון המסומן בציור.
מה ההתארכות המקסימלית של הקפיץ?

2) הרמונית עם גזירה של חוט *(רק למי שמכיר את הנושא של תאוצות לא שוות)*

במערכת הבאה הגלגלות והקפיץ אידיאלים.



קבוע הקפיץ הוא: $k = 50\frac{\text{N}}{\text{m}}$ והמסה: $M = 4\text{kg}$.

א. מצאו את התארכות הקפיץ במצב שיווי המשקל.

ב. מה ההעתק של המשקולת במצב שיווי המשקל (ביחס למצבה כשהקפיץ רפוי).

ג. מהי תדירות התנודות של המערכת?

ד. מותחים את המשקולת מטה 20cm מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה.
רשמו ביטוי למיקום של המשקולת כתלות בזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $v_{c.m.}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_2}d}}{m_1+m_2}$ ב. $\Delta=\frac{F}{2k+k\frac{m_2-m_1}{m_1}}$

2) א. $0.2m$ ב. $0.05m$ ג. $3.54\frac{rad}{sec}$

ד. $x(t)=0.2\cos(3.54t)$ משיווי משקל.